# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

## SESSION 2024

## Épreuve de mathématiques

***GROUPEMENT B*** ***CODE : 24MATGRB3***

## Durée : 2 heures

| SPÉCIALITÉ | COEFFICIENT |
|---|---|
| Électrotechnique | 2 |

**L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.**

**L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.**

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.**

**Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.**

## EXERCICE 1 (10 points)

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant $t$.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et $t$ désigne le nombre de jours de séchage.

*Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

### Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' + 0{,}06y = 2{,}1 \ ,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$, définie et dérivable sur $[\,0\,;\, +\infty\,[$, et où $y'$ est la dérivée de $y$.

**1.** Résoudre sur $[0\,; +\infty\,[$ l'équation différentielle :

$$(E_0): \ y' + 0{,}06y = 0$$

On fournit la formule suivante :

| Équation différentielle | Solutions sur un intervalle $I$ |
|---|---|
| $y' + ay = 0$ | $y(t) = k\mathrm{e}^{-a\,t}$ |

**2.** On considère la fonction constante $g$ définie sur $[0\,; +\infty\,[$ par $g(t) = 35$.
Vérifier que la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

**3.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

**4.** À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
En déduire que la fonction $f$ est définie sur $[0\,; +\infty\,[$ par : $f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

### Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction $f$ définie sur $[0\,; +\infty\,[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35\,.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de $t$ jours de séchage.

**1.** Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
Arrondir au dixième.

**2.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel $t$ appartenant à $[0\,;+\infty\,[$ , on a :

$$f'(t) = 2{,}1\mathrm{e}^{-0{,}06t}\,.$$

**3.** Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variations de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$ .

**4.** Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque $t$ tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**5.** Le fabricant du béton affirme que la résistance après $28$ jours de séchage correspond à $80\%$ de la résistance finale.

Cette affirmation est-elle juste ?

**6.** On considère la fonction $F$ définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $F(t)\ =\ \left(\frac{1750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t}\ + 35t$ .
Montrer que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$.

**7.** Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les $28$ premiers jours.

On fournit la formule suivante :

| |
|---|
| La valeur moyenne $M$ d'une fonction $h$ sur l'intervalle $[a\,;b]$ est définie par : $$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\ .$$ |

## Partie C. Algorithme

On note $N$ le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à $21$ MPa.

**1.** Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes **3** et **4**.

| | |
|---|---|
| Ligne 1 | $t \leftarrow 0$ |
| Ligne 2 | $R \leftarrow 0$ |
| Ligne 3 | Tant que …………… |
| Ligne 4 | $t \leftarrow$ ……… |
| Ligne 5 | $R \leftarrow -35\mathrm{e}^{-0{,}06t}\ + 35$ |
| Ligne 6 | Fin Tant que |

**2.** Donner la valeur de $N$. Expliquer la démarche suivie.

## EXERCICE 2 (10 points)

*Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.*

On étudie le fonctionnement d'un filtre.

La tension en entrée du filtre est une fonction $E$ pour laquelle on possède les informations suivantes :

- $E$ est une fonction périodique de période $T = 20$ .
- $E(t) = \begin{cases} 12 \text{ si } t \in [0; 10[ \\ 0 \text{ si } t \in [10; 20[ \end{cases}$.

**1.** On note $\omega$ la pulsation de la fonction $E$ .
Vérifier que $\omega = \frac{\pi}{10}$.

**2.** Représenter la courbe de la fonction $E$ sur votre copie en respectant les consignes suivantes :

- Échelle des abscisses : $2$ cm pour représenter l'intervalle allant de $t = 0$ à $t = 10$.
- Échelle des ordonnées : $1$ cm pour représenter l'intervalle allant de $E = 0$ à $E = 2$.
- La représentation est effectuée pour $t \in [-30 ; 30]$.

**3.** Déterminer la valeur moyenne $a_0$ de $E$.

**4.** On rappelle que la valeur efficace de $E$ , notée $E_{\text{eff}}$ est donnée par :

$$(E_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(E(t)\right)^2 \text{dt}.$$

Montrer que $E_{\text{eff}} = 6\sqrt{2}$.

**5.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$ , on a $a_n = 0$.

**6.** On admet que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$b_n = \frac{12}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right).$$

Montrer que, lorsque $n$ est pair, on a $b_n = 0$.

**7.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs seront arrondies à $0{,}01$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $b_n$ | | | | | | | |

**8.** On considère la grandeur $E_7$ , définie par :

$$(E_7)^2 = (a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}((a_k)^2 + (b_k)^2)\,.$$

Commenter l'affirmation suivante :
« $E_7$ représente une approximation de $E_{\text{eff}}$ avec moins de $5$ % d'erreur ».

## ***FORMULAIRE sur les séries de Fourier***

$f$ est une fonction périodique de période $T$ et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction $f$ :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{dt}.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$

La valeur efficace du signal $f$ est notée $f_{\text{eff}}$ . Elle est donnée par :

$$(f_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\mathrm{dt}$$

➔ Lorsque la fonction $f$ est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$