Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2018/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire

On étudie le départ d'un wagon propulsé dans un tube à basse pression, avec pour objectif d'atteindre une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes. L'exercice mobilise les équations différentielles, l'étude de la distance et de la vitesse, puis le calcul intégral de l'aire d'une pièce conçue pour une gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

L'équation s'écrit sous la forme fournie dans le sujet, $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. Les solutions sont donc $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par sa valeur, on obtient l'ensemble des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ qui vérifient l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. La dérivée de $g(t) = -15t - 75$ est $g'(t) = -15$.
2. En substituant dans le membre de gauche, on trouve $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75)$.
3. Après développement, cette expression vaut $-15 + 3t + 15 = 3t$, ce qui correspond au membre de droite.

L'égalité est vraie pour tout $t \in [0, 3]$: g est bien une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$ sur $[0, 3]$, donc g est une solution.

Question 3°. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Une solution de l'équation complète est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée. La solution particulière donnée est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $ke^{0,2t}$. En les additionnant, on obtient toutes les solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale f(0) = 0, sachant qu'à t = 0 le wagon est au point de départ.

1. La solution générale est $f(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$.
2. La condition initiale $f(0) = 0$ donne $k - 75 = 0$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 75$.
3. En remplaçant la constante, on obtient la fonction recherchée. Elle vérifie l'équation différentielle et vaut bien zéro au départ.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions admises de f et de f', résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

L'expression admise dans le sujet est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, cette inégalité équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Sur l'intervalle d'étude, elle est vérifiée partout, avec égalité en $t = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec $f'(0) = 0$.

Question 1° b). Déduire de la résolution de l'inéquation f'(t) ≥ 0 les variations de la fonction f sur [0, 3].

Valeur de t	Signe de $f'(t)$	Variation de f
0	0	$f(0) = 0$
$]0, 3]$	positif	croissante

La dérivée est positive après l'instant initial et ne change pas de signe. La distance parcourue augmente donc sur tout l'intervalle $[0, 3]$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction f est croissante sur $[0, 3]$, de $f(0) = 0$ à $f(3)$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième de kilomètre.

La distance parcourue au bout d'une minute est $f(1)$. En utilisant l'expression de la fonction donnée dans le sujet, $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Le calcul donne environ $1,6052$ km. On arrondit ensuite au dixième de kilomètre, comme demandé. La distance est exprimée en kilomètres puisque c'est l'unité de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après une minute, la distance parcourue est de $1,6$ km, arrondie au dixième.

Question 3° a). En utilisant f'(t) comme expression de la vitesse en kilomètres par minute, déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse instantanée est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute. À $t = 2$, on calcule $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,377$. L'arrondi au dixième donne la vitesse demandée. On conserve l'unité kilomètre par minute, celle utilisée pour la vitesse dans cette question.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À $t = 2$ minutes, la vitesse est d'environ $7,4$ km/min.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

La vitesse cible de 400 km/h correspond à $400/60 \approx 6,667$ km/min. À deux minutes, la vitesse vaut $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,377$ km/min, donc elle dépasse la cible. De plus, $f'(0) = 0$ et f' est continue et croissante. Elle atteint donc cette cible à un instant strictement inférieur à deux minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui. La vitesse dépasse 400 km/h à deux minutes et l'atteint donc avant l'échéance.

Question 4°. Parmi les trois propositions, recopier l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La pente de la tangente au point d'abscisse 2 est $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$. La formule du sujet donne $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$, avec $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$. En développant puis en regroupant les termes constants, on obtient la troisième proposition. L'abscisse est notée t, comme dans l'équation de la tangente proposée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La tangente est $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$, soit la troisième proposition.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir parmi les propositions l'aire A1 du rectangle OPQR représenté sur le schéma, exprimée en unités d'aire.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ a pour largeur $OP = 3$, l'abscisse de P et de Q. Sa hauteur est $OR = 2,25$, car son bord supérieur est la droite d'équation $y = 2,25$. L'aire d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa hauteur. On choisit donc la proposition correspondant à $3 \times 2,25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ unités d'aire.

Question 2°. Calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3, en exploitant la primitive fournie.

Sur $[0, 3]$, $g(x) = \frac{27x}{2x^2+18}$ est positive, donc l'aire demandée est son intégrale. La primitive fournie est $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2 + 9) + c_1$. Ainsi, $A_2 = G(3) - G(0) = \frac{27}{4}(\ln(18) - \ln(9))$. La constante s'élimine et la différence des logarithmes vaut $\ln(2)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln(2) \approx 4,679$ unités d'aire.

Question 3°. À partir des questions précédentes, déterminer l'aire hachurée A en unités d'aire et arrondir au millième.

La pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. À droite de cet axe, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. On double cette différence pour obtenir l'aire totale : $A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln(2)\right)$. On arrondit au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'aire hachurée totale est $A \approx 4,143$ unités d'aire.

2. Probabilités et test d’hypothèse sur l’obsolescence programmée des smartphones

L’exercice étudie l’obsolescence technique et logicielle de smartphones, puis la proportion de modèles A non réparables dans des lots prélevés au service après-vente. Il évalue les probabilités conditionnelles, la loi binomiale, l’espérance et un test bilatéral portant sur un sondage relatif à la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des informations de l’énoncé et de la population de 200 smartphones, compléter le tableau d’effectifs croisant l’obsolescence technique et l’obsolescence logicielle, avec les totaux.

Les 3 % de 200 donnent 6 smartphones touchés par l’obsolescence technique. Les 8 % donnent 16 smartphones touchés par l’obsolescence logicielle. Parmi ces 16, les 12,5 % aussi touchés techniquement représentent 2 smartphones. On complète les autres cases avec les totaux de ligne et de colonne.

Smartphones	Touchés par l’obsolescence logicielle	Non touchés par l’obsolescence logicielle	Total
Touchés par l’obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l’obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d’effectifs complété

Smartphones	touchés par l’obsolescence logicielle	non touchés par l’obsolescence logicielle	Total
touchés par l’obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l’obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4 et 6 pour la ligne technique ; 14, 180 et 194 pour l’autre ligne. Totaux : 16, 184 et 200.

Question 2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l’obsolescence technique, L l’obsolescence logicielle et P_L(T) la probabilité de T sachant que L est réalisé.

L’obsolescence technique touche 3 % de la population, et l’obsolescence logicielle en touche 8 %. Enfin, l’énoncé précise que, parmi les smartphones touchés par L, 12,5 % sont également touchés par T. Cette dernière fréquence est directement la probabilité conditionnelle de T sachant L.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,03$; $P(L) = 0,08$; $P_L(T) = 0,125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle.

La probabilité d'être touché par les deux types d'obsolescence s'obtient en multipliant la probabilité de L par celle de T sachant L. La donnée conditionnelle de l'énoncé s'applique donc à la proportion touchée par l'obsolescence logicielle :

$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,08 \times 0,125 = 0,01.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0,010$, soit 1 % des smartphones étudiés.

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

Pour calculer la probabilité d'être touché par au moins un des deux types, on additionne les probabilités de T et de L, puis on soustrait leur intersection, comptée deux fois dans cette somme.

1. $P(T \cap L) = 0,08 \times 0,125 = 0,01.$
2. $P(T \cup L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0,100$, soit 10 % des smartphones touchés par au moins un type d'obsolescence.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité cherchée est celle de L parmi les smartphones touchés par T. On divise donc la probabilité de l'intersection par celle de T. La fraction exacte est un tiers ; l'exercice demande un arrondi au millième pour les résultats de cette partie.

$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0,01}{0,03} = \frac{1}{3} \approx 0,333.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = \frac{1}{3} \approx 0,333$, soit environ 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui associe à chaque lot de 50 smartphones le nombre de modèles non réparables, suit une loi binomiale, puis en déterminer les paramètres.

Chaque smartphone prélevé constitue un tirage ayant deux issues : réparable ou non réparable. La probabilité d'obtenir un smartphone non réparable est constante, égale à 4,5 %. Le stock étant suffisamment important pour assimiler le prélèvement à des tirages avec remise, les 50 tirages sont indépendants. X compte le nombre de succès en 50 tirages : c'est une variable binomiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045)$, avec les paramètres $n = 50$ et $p = 0,045$.

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous soient réparables.

Le lot est entièrement réparable si aucun des smartphones n'est non réparable, donc si $X = 0$. La probabilité qu'un smartphone soit réparable vaut $1 - 0,045 = 0,955$. Par indépendance des 50 tirages, la probabilité que les 50 smartphones soient réparables est le produit des 50 probabilités égales :

$P(X = 0) = 0,955^{50}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) = 0,955^{50} \approx 0,100$ au millième.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme pour i allant de 0 à 3, puis compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et de S.

Pour chaque valeur de i, l'algorithme ajoute $P(X = i)$ à la somme précédente. On calcule les probabilités binomiales puis les sommes cumulées. Les valeurs du tableau sont arrondies au millième, comme demandé dans les consignes générales de l'exercice.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = i)$: 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Valeurs successives de S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, S est la somme des probabilités des événements incompatibles $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$. Elle représente donc la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables. La somme vaut environ 0,813 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S = P(X \leq 3) = 0,813$: environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut np. Ici, $E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25$. Cette moyenne n'est pas nécessairement le nombre de téléphones non réparables dans un lot donné : elle signifie que, sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, on en comptera en moyenne 2,25 par lot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(X) = 2,25$ smartphones non réparables en moyenne par lot de 50.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Parmi les trois propositions, choisir la valeur de h arrondie au centième telle que, sous H0 : p = 0,55, P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, la fréquence F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs est approximativement situé à 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$, soit 0,07 au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition correcte est $h = 0,07$ au centième.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, la règle du test bilatéral consiste à comparer la fréquence observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0. Avec la valeur de h retenue, cet intervalle est centré sur 0,55 et ses bornes sont obtenues en lui retranchant puis en lui ajoutant 0,07.

- Si $0,48 \leq F \leq 0,62$, ne pas rejeter H_0.
- Sinon, rejeter H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $F \in [0,48\,;\,0,62]$; le rejeter si F est hors de cet intervalle.

Question 3°. À partir de l'échantillon de 180 personnes, dont 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée, donner la conclusion du test.

La fréquence observée est $F = 76/180 \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de conservation de H_0. Elle se trouve donc dans la région de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %. L'échantillon ne confirme pas la proportion annoncée de 55 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : la fréquence observée est $76/180 \approx 0,422$, inférieure à 0,48.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient dépend de la spécialité et varie de 1 à 3. Le premier exercice étudie le départ d'un train à très haute vitesse et l'aire d'une pièce. Le second traite l'obsolescence des smartphones par les probabilités, la loi binomiale et un test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - ay = b(t), la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- La vitesse instantanée correspondant à une distance f(t) est f'(t) ; convertir les unités avant de comparer une vitesse à 400 km/h.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n,p), P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k) et E(X) = np.
- Une probabilité conditionnelle vérifie P(T sachant L) = P(T ∩ L)/P(L), si P(L) est non nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Comparer les vitesses dans les mêmes unités : f'(t) est en kilomètres par minute, tandis que l'objectif est exprimé en kilomètres par heure.
- Pour calculer une aire, tenir compte des bornes, du signe de la fonction et de la symétrie donnée dans l'énoncé.
- Pour la loi binomiale, identifier les essais indépendants, leur nombre et la probabilité constante d'obtenir un smartphone non réparable.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée à l'intervalle de décision et formuler une conclusion au seuil de 5 %.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la fonction distance à partir de l'équation différentielle ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis trouvez une solution particulière de l'équation complète. La famille des solutions s'obtient en les additionnant. Appliquez ensuite f(0) = 0 pour déterminer la constante et obtenir la fonction distance.

Q : Comment choisir les paramètres de la loi binomiale dans la partie sur les smartphones ?

Chaque téléphone constitue un essai, avec une probabilité de 0,045 d'être non réparable. Le prélèvement étant assimilé à des tirages avec remise, les 50 essais sont indépendants : X suit donc une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

Q : Comment organiser son temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, avancez dès qu'une question bloque, puis gardez quelques minutes pour vérifier calculs, arrondis, unités et conclusions.

Q : Quels arrondis et quelles justifications faut-il respecter ?

Dans l'exercice 2, les résultats sont arrondis à 10^{-3}, sauf indication contraire. Respectez les arrondis précisés dans l'exercice 1. Justifiez les questions qui le demandent ; pour les QCM, recopiez la réponse choisie sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2018/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Fonderie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.