Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

# Mathématiques - Groupement B des BTS

**Session 2022** • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf 3 pour la spécialité Traitement des matériaux**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Contrôle de conformité et durée de vie de tubes fluorescents** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

**Sujet officiel (PDF) :** https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2022/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

# 1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s ralentit sous l'effet d'un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f du temps. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction vitesse, la distance parcourue et le développement limité au voisinage de zéro.

## Partie A - Résolution d'une équation différentielle

**Question 1. a.** **Résoudre l'équation différentielle homogène ($E_0$) : y' + 0,8y = 0.**

L'équation est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. La formule fournie donne donc toutes les solutions sur l'intervalle considéré. La constante réelle $k$ peut être nulle ou non, ce qui inclut la solution nulle. On obtient ainsi l'ensemble des fonctions solutions de $(E_0)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

---

**Question 1. b.** **Soit g définie sur [0 ; +∞[ par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de $(E)$, on obtient :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

Cette valeur est égale au membre de droite de l'équation pour tout $t \geq 0$. La fonction $g$ vérifie donc bien l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $(E)$.

---

**Question 1. c.** **Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

1. Une solution particulière de $(E)$ est $g(t) = 5$, comme vérifié à la question précédente.
2. Les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{-0,8t}$, où $k$ est réel.
3. Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière une solution de l'équation homogène.

Cette forme fournit l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

**Question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

On part de la solution générale $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, puis on impose la condition initiale. À $t = 0$, l'exponentielle vaut 1, donc $f(0) = 5 + k$. Comme $f(0) = 20$, il faut que $k = 20 - 5 = 15$. On remplace cette constante dans la solution générale pour obtenir la fonction vitesse recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

## Partie B - Étude de la fonction f

**Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, est égale à 5.**

Sur $[0; +\infty[$, on a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Le terme $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. Il ne reste alors que le terme constant de l'expression de $f$, ce qui établit la limite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

**Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, lorsque la fonction tend vers une valeur finie $L$, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. La courbe $C$ se rapproche donc, quand le temps augmente, de la droite horizontale située à l'ordonnée 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

**Question 2. À partir de l'expression donnée pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, l'expression admise $f'(t) = -12e^{-0,8t}$ est strictement négative sur tout l'intervalle. La fonction est donc strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t)$ tend vers 5 à l'infini. Le tableau de variation est le suivant :

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $20$ | $\searrow 5$ |

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f$ décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

---

**Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour que le chariot s'arrête dans ce modèle, sa vitesse doit s'annuler à un instant. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $15e^{-0,8t} > 0$. La vitesse est ainsi toujours strictement supérieure à 5, même si elle décroît et se rapproche de 5.

- La vitesse n'atteint jamais 0.
- Le chariot ne s'arrête donc pas selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : $f(t) > 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pour tout $t \geq 0$, donc le chariot ne s'arrête pas.

---

**Question 4. a. On considère F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée est $-0,8e^{-0,8t}$, d'où :

$$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5.$$

Cette dérivée est exactement l'expression de $f(t)$. Ainsi, $F$ est bien une primitive de $f$ sur $[0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc $F$ est une primitive de $f$.

---

**Question 4. b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, elle vaut $d = F(1) - F(0)$. On calcule donc $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette valeur est environ $15,3251$ mètres. Arrondie au centimètre, elle vaut $15,33$ mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

## Partie C - Étude locale

**Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le calcul formel du sujet donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque $t$ tend vers 0. Il faut donc retenir la proposition qui conserve les trois termes du polynôme et ajoute ce reste. La proposition avec seulement $\varepsilon(t)$ ne convient pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

**Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On lit dans l'énoncé que $f(0) = 20$, et l'expression admise de la dérivée donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces deux valeurs dans la formule, on obtient l'équation de la tangente demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

## 2. Contrôle de conformité et durée de vie de tubes fluorescents

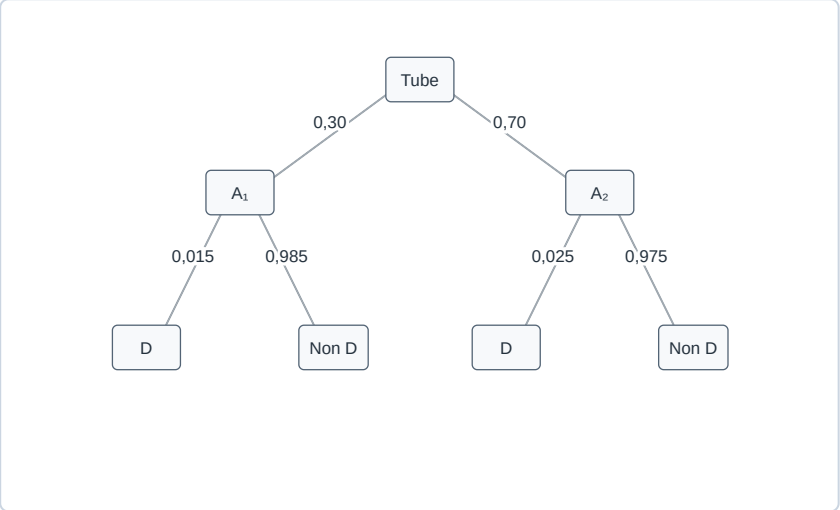
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents, puis modélise leur durée de bon fonctionnement par une loi exponentielle. L'exercice traite aussi de l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

### Partie A - Probabilités conditionnelles

**Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la provenance des tubes et la présence éventuelle d'un défaut, à partir des données des deux ateliers.**

Le premier niveau indique l'atelier d'origine. Depuis chaque atelier, les branches donnent les probabilités conditionnelles de défaut et d'absence de défaut.

**Provenance et conformité des tubes**




$A_1$ : atelier 1 ; $A_2$ : atelier 2 ; D : tube défectueux.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Arbre pondéré ci-dessous.

**Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit $P(A_1 \cap D)$.**

Le chemin correspondant à l'atelier 1 puis à un défaut donne : **$P(A_1 \cap D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$**.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

**$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$**, soit 0,45 %.

**Question 3. Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut. La valeur imprimée dans la consigne est 0,0195, avec une annotation manuscrite 0,0220 sur l'image.**

Les deux chemins menant à un défaut sont disjoints : **$P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$**. Le résultat confirme l'annotation manuscrite 0,0220 ; la valeur imprimée 0,0195 est incohérente avec les données.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$P(D) = 0{,}0220$**, soit 2,20 %.

**Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On rapporte la probabilité du chemin « atelier 2 et sans défaut » à celle de l'absence de défaut : **$P(A_2 \mid \text{non } D) = (0{,}70 \times 0{,}975)/(1 - 0{,}022) \approx 0{,}6979$**.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$P(A_2 \mid \text{non } D) \approx 0{,}698$**, soit environ 69,8 %.

## Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

**Question 1. Pour une durée de bon fonctionnement T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0001$, déterminer E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0001$, **$E(T) = 1/\lambda = 1/0{,}0001 = 10\,000$**. La durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube est donc de 10 000 heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$E(T) = 10\,000$ heures.**

**Question 2. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

Avec la fonction de répartition de la loi exponentielle : **$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} \approx 0{,}5507$**. Au centième, cela donne 0,55.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$**, soit 55 %.

**Question 3.** **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de survie au-delà de 10 000 heures est $\mathbf{P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679}$, soit 0,37 au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **P(T > 10 000) ≈ 0,37**, soit 37 %.

## Partie C - Intervalle de confiance

**Question 1.** **À partir de l'échantillon de 1 000 rivets, dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes.**

La fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon estime la proportion de la production : **f = 975/1 000 = 0,975**.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **f = 0,975**, soit 97,5 %.

**Question 2.** **Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %, centré sur la fréquence observée f, puis arrondir les bornes au millième.**

Avec la formule de l'énoncé, on calcule $\mathbf{f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}}$, pour f = 0,975 et n = 1 000. Les bornes obtenues sont 0,965323… et 0,984677… ; on les arrondit au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Intervalle de confiance à 95 % : [0,965 ; 0,985].**

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** Épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, durée deux heures et coefficient 2, ou 3 pour Traitement des matériaux. Elle étudie le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents, en évaluant équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités conditionnelles, loi exponentielle et estimation d'une proportion.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at); une solution particulière permet de construire les solutions avec second membre.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ donne l'asymptote horizontale d'équation y = 5.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni pour une proportion est f ± 1,96√(f(1-f)/n).

### Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
- Pour le tableau de variation, étudier le signe de f' et indiquer la valeur initiale ainsi que la limite en +∞.
- Distinguer P(T ≤ t) de P(T > t) et utiliser la probabilité complémentaire quand nécessaire.
- Pour l'intervalle de confiance, prendre f = 975/1 000, n = 1 000 et arrondir les bornes au millième.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment trouver la solution qui correspond à la vitesse initiale du chariot ?**

Déterminez d'abord la forme générale des solutions de l'équation avec second membre. Remplacez ensuite t par 0 et f(0) par 20 pour calculer la constante, puis vérifiez que l'expression obtenue satisfait l'équation et la condition initiale.

**Q : Comment calculer une probabilité de durée supérieure à une valeur avec la loi exponentielle ?**

La formule fournie donne P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt). Pour une durée supérieure à t, utilisez l'événement complémentaire : P(T > t) = e^(-λt), puis remplacez λ et t par les valeurs indiquées dans l'énoncé.

**Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?**

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de chacun peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, avancez même si une question bloque et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis.

**Q : Quelle valeur utiliser pour la probabilité de défaut de l'exercice 2 ?**

Les données indiquent 30 % de tubes de l'atelier 1 avec 1,5 % de défauts, et 70 % de l'atelier 2 avec 2,5 % de défauts. L'image montre 0,0195 imprimé et une annotation manuscrite 0,0220 : signalez la discordance.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2022/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
**Ressources BTS Fonderie :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.