Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace appliquées à un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2022/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse f(t) est étudiée. Les questions portent sur une équation différentielle, l'évolution de la vitesse, la distance parcourue et l'étude locale de la fonction.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

On reconnaît l'équation différentielle homogène de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. D'après la formule fournie, ses solutions sont les fonctions exponentielles $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par sa valeur, on obtient l'ensemble des solutions sur l'intervalle demandé. Aucune condition initiale n'est imposée ici.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$ pour tout t. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de l'équation, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette expression est égale au second membre, ce qui vérifie l'équation pour tout t de l'intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de (E).

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de (E), à savoir $g(t) = 5$. À toute solution particulière, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée (E_0), trouvées à la question précédente. On obtient ainsi toutes les solutions de l'équation complète, car la différence de deux solutions de (E) vérifie l'équation homogène.

La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale de (E) est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc $f(0) = 5 + k$. La condition $f(0) = 20$ donne alors $k = 20 - 5 = 15$. Il suffit de remplacer k dans la solution générale pour obtenir la fonction vitesse correspondant à la condition initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Pour tout $t \geq 0$, la fonction est définie par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc l'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Le terme exponentiel tend ainsi vers zéro et le terme constant reste égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

La limite de la fonction en $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée 5 lorsque t augmente sans borne. Cette droite est une asymptote horizontale à C en $+\infty$. Son équation s'écrit avec la variable verticale y.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ et f est strictement décroissante. Elle vaut 20 en zéro et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, on a $e^{-0,8t} > 0$. Par conséquent, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le premier terme est strictement positif et $f(t) > 5$. La vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$, mais n'atteint jamais zéro. Dans le cadre de ce modèle, le chariot ralentit sans s'arrêter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ et ne s'annule pas.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée du terme exponentiel est $-18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t}$, et celle de $5t$ est 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, expression égale à $f(t)$. Donc F est bien une primitive de f sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ à l'aide de l'intégrale de f, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Le théorème fondamental de l'analyse donne $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive fournie, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. C'est la valeur exacte en mètres. Son évaluation, arrondie au centimètre, donne la distance demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir la proposition donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le calcul formel affiché sur le sujet donne la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Dans un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Il faut donc choisir la proposition qui présente ces deux éléments.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en l'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On lit dans les données que $f(0) = 20$, et l'expression fournie de la dérivée donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace appliquées à un système électrique

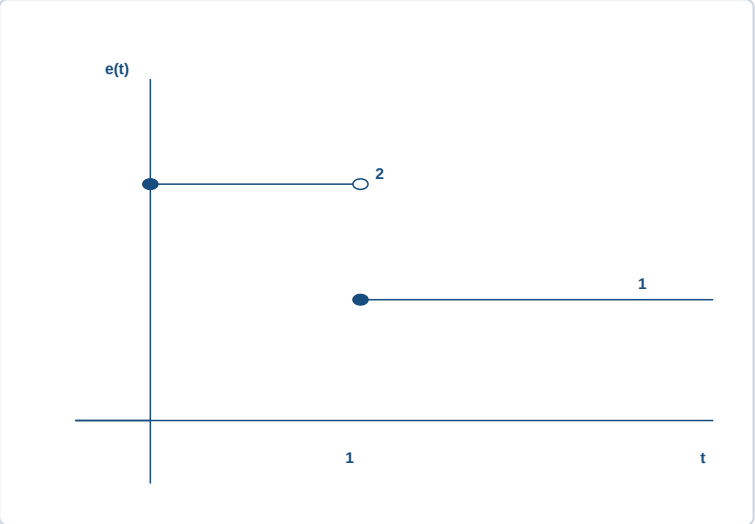
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et produit un signal de sortie s(t). À l'aide de la fonction de transfert et du formulaire de Laplace, l'exercice demande d'étudier et de représenter les signaux d'entrée et de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme les fonctions échelon valent 1 dès leur instant d'activation, le signal vaut 0 avant 0, puis 2 sur $0 \leq t < 1$. À partir de 1, le terme soustrait s'active : le signal vaut alors 1. Le tracé comporte donc un saut en 0, puis un saut descendant en 1.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité et d'après le formulaire, $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$. On transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, puis on applique leurs coefficients :

$$E(p) = 2\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La fonction de transfert donnée est $H(p) = 1/(p+1)$. Avec la relation $S(p) = H(p)E(p)$ et le résultat de la partie A, on obtient :

$$S(p) = \frac{1}{p+1} \times \frac{2 - e^{-p}}{p} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

C'est bien l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

Mettons les deux fractions au même dénominateur. Le numérateur se simplifie :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées inverses de Laplace de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1).

Les deux premières inverses se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux suivantes, le facteur e^{-p} traduit un retard d'une unité : la fonction obtenue est multipliée par $U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

En utilisant la décomposition précédente, l'inverse de $S(p)$ est $2[U(t) - e^{-t}U(t)] - [U(t-1) - e^{-(t-1)}U(t-1)]$. Sur $[0;1[$, les termes contenant $U(t-1)$ sont nuls et $U(t) = 1$. Il reste donc $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.

On évalue l'expression donnée sur $[1;+[$ en prenant $t = 1$:

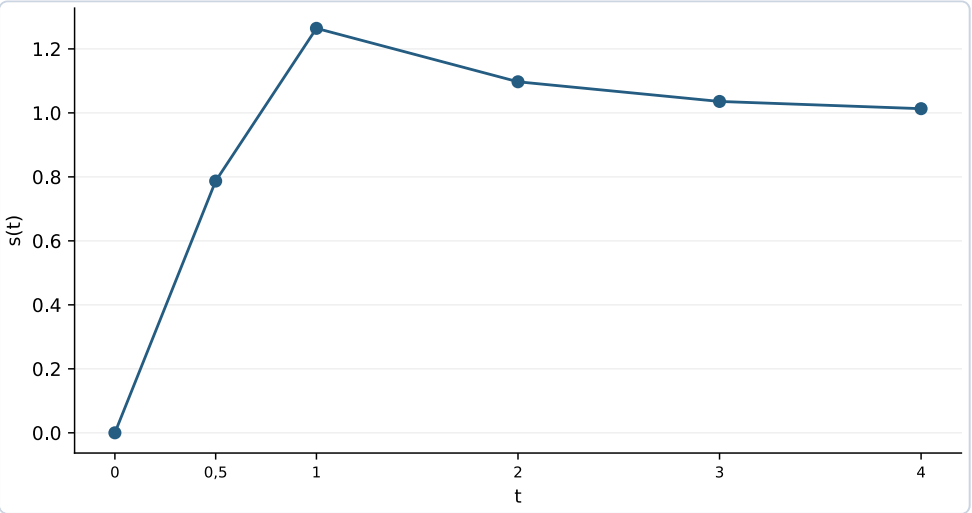
$$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

Avec $e \approx 2{,}71828$, on obtient $s(1) \approx 1{,}2642$, soit $1{,}3$ au dixième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la sortie suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $s(1) = 2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$, décroît car $e - 2 > 0$, et tend vers 1. Le tracé ci-dessous montre le maximum en $t = 1$ et l'asymptote horizontale $s = 1$.



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe atteint son maximum $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}26$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Comme $e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +$, le terme exponentiel tend vers 0. La limite de la sortie est donc la constante 1, qui est aussi l'asymptote horizontale de sa courbe.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, avec équations différentielles, fonctions, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^{-at} ; pour un second membre constant, on ajoute une solution particulière.
- Si f(t) tend vers une limite L lorsque t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse : d = ∫ f(t) dt sur l'intervalle considéré.
- La transformée de Laplace de U(t − a) est e^{-ap}/p ; le décalage temporel multiplie la transformée par e^{-ap}.

Points de vigilance & attentes du jury

- Déterminer la solution générale de l'équation différentielle avant d'appliquer la condition initiale f(0) = 20.
- Distinguer une vitesse qui tend vers une limite positive d'une vitesse qui atteint zéro pour conclure sur l'arrêt.
- Calculer la distance en évaluant la primitive aux deux bornes, puis arrondir au centimètre comme demandé.
- Pour le signal de sortie, appliquer le décalage à t = 1 et distinguer les expressions données sur chaque intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la constante dans la solution de l'équation différentielle du chariot ?

Écrivez la solution générale de l'équation avec second membre, puis utilisez f(0) = 20. En remplaçant t par 0, vous obtenez une équation qui permet de déterminer la constante et de préciser la fonction f.

Q : Pourquoi une vitesse qui tend vers 5 ne signifie-t-elle pas que le chariot s'arrête ?

Le chariot s'arrête si sa vitesse devient nulle. Ici, f(t) décroît vers 5 $m \cdot s^{-1}$, une limite strictement positive. Selon le modèle étudié, la vitesse ne tend donc pas vers zéro et le chariot ne s'arrête pas.

Q : Comment répartir le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Vous pouvez répartir le temps entre eux, traiter les questions dans l'ordre où elles sont accessibles et garder quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les tracés demandés.

Q : Quelles précisions faut-il respecter pour les tracés et les résultats numériques ?

Tracez les signaux sur le document-réponse indiqué dans le sujet. Conservez les valeurs exactes dans les calculs, puis donnez les approximations demandées : au dixième pour s(1) et au centimètre pour la distance.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2022/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Fonderie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.