Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2023/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La fermeture d'un tiroir est modélisée par la distance entre le point M du tiroir et le point O du meuble, en fonction du temps. L'exercice étudie cette distance par une équation différentielle, puis par l'analyse de la fonction exponentielle, un algorithme, une tangente et un développement limité.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

Le discriminant est $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les racines sont $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. **À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.**

Les racines caractéristiques étant réelles et distinctes, la solution générale est la combinaison des exponentielles associées à ces racines :

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A : Conditions initiales

Question 2.a. **À partir de la position initiale de M et de sa vitesse au départ, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).**

La distance initiale donne directement la valeur de la fonction. La vitesse de déplacement vers O, indiquée négative, est la dérivée de cette distance par rapport au temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant l'expression donnée de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

1. On remplace t par 2 dans l'expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3} e^{-2} - \frac{10}{3} e^{-4 \times 2}$.
2. La distance exacte est donc cette différence d'exponentielles.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Partie A : Fermeture du tiroir

Question Application. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc la distance est inférieure à 0,5 cm. Comme f est continue, elle est également inférieure à 0,5 cm à un instant juste avant 4 secondes. Le tiroir est donc fermé en moins de 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé avant 4 s.

Partie B : Étude de fonction

Question 1.a. À partir de l'expression de f(t) et de la limite rappelée pour e^{-u}, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Les deux exponentielles de l'expression de f tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Leurs combinaisons par des constantes tendent donc également vers 0.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et donner une équation de celle-ci.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 0. La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme avec $(e^{at})' = ae^{at}$: le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et le second donne $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

La dérivée étant strictement négative, f décroît sur l'intervalle. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 0.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Partie B : Algorithme

Question 3.a. **Recopier le tableau de suivi, en ajoutant des lignes si nécessaire, et le compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies au centième, et le résultat de la condition pour chaque ligne.**

À chaque ligne, t augmente de 0,1. La boucle s'arrête à la première valeur pour laquelle $f(t) > 0{,}5$ est fausse.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

1. À $t = 3{,}8$, $f(t) \approx 0{,}52 > 0{,}5$: la boucle continue.
2. À $t = 3{,}9$, $f(t) \approx 0{,}47 < 0{,}5$: la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête. Le tiroir est alors fermé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé.

Partie B : Tangente et développement limité

Question 4.a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Avec $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$, on obtient l'équation recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

T : $y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les propositions, recopier le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

> Le polynôme de Taylor fourni est $20 - 10t - 15t^2$. Le développement limité à l'ordre deux s'écrit donc $20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 4.c. Choisir l'affirmation exacte concernant la position de la courbe C par rapport à sa tangente T au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Au voisinage de 0, la différence entre la courbe et la tangente est donnée par le terme quadratique du développement limité : $f(t) - (20 - 10t) = -15t^2 + t^2\varepsilon(t)$. Elle est négative pour $t \neq 0$ suffisamment proche de 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe C est en dessous de la tangente T au voisinage de 0.

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos

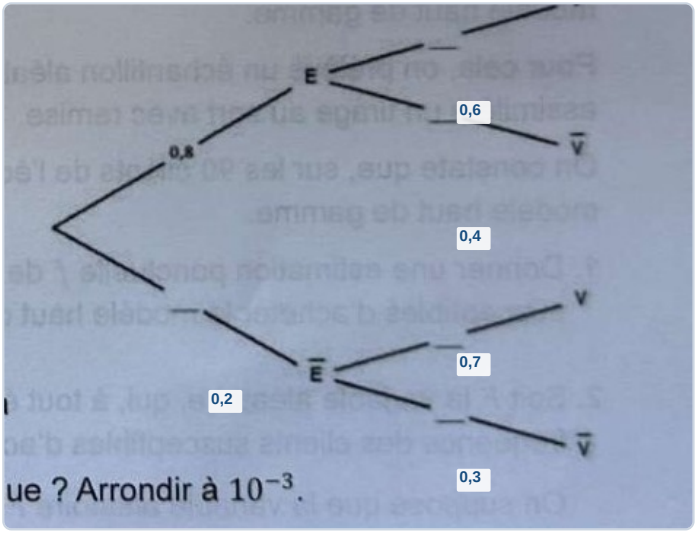
Un magasin de vélos prête des modèles électriques ou mécaniques pour favoriser les ventes, et les résultats sont étudiés à l'aide de probabilités conditionnelles. L'exercice porte aussi sur la durée de réparation d'un échantillon de vélos et sur l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A : Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'éventuelle vente, à partir des données fournies.

La première bifurcation distingue les vélos électriques (0,8) des vélos mécaniques (0,2). Depuis chaque branche, les probabilités de vente sont respectivement 0,6 et 0,7. Les probabilités complémentaires d'absence de vente sont 0,4 et 0,3. L'arbre ci-dessous complète les quatre branches conditionnelles.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Électrique : 0,8 ; mécanique : 0,2 ; vente : 0,6 et 0,7 ; absence de vente : 0,4 et 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité que le vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

Le chemin « électrique puis vente » a pour probabilité le produit de la probabilité d'un vélo électrique et de la probabilité conditionnelle d'une vente après ce prêt : $P(E \cap V) = P(E) \times P(V \mid E) = 0,8 \times 0,6$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les deux types de vélos peuvent mener à une vente. Par addition des probabilités des chemins correspondants : $P(V) = P(E)P(V \mid E) + P(\overline{E})P(V \mid \overline{E}) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7 = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62$, soit 62 %.

Question 4. **Sachant qu'un prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité que le vélo prêté ait été électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

La probabilité demandée est conditionnelle à une vente. On divise donc la probabilité d'un vélo électrique vendu par la probabilité totale d'une vente : $P(E \mid V) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{0,48}{0,62}$. L'arrondi demandé est au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E \mid V) \approx 0,774$.

Partie B : Loi binomiale

Question 1. **Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X, qui compte les vélos de l'échantillon de 80 dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre.**

La variable compte les succès de 80 essais, avec une probabilité de succès de 0,62 pour chaque réparation. Comme l'énoncé admet le modèle binomial, ses paramètres sont le nombre d'essais et la probabilité de succès.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80; 0,62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62 : $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40} \approx 0,008288$. L'arrondi au millième est 0,008.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos dont la réparation nécessite moins d'une heure soit strictement supérieur au nombre de vélos dont la réparation nécessite plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

Si X vélos nécessitent moins d'une heure, les autres sont ceux qui nécessitent plus d'une heure dans le modèle de l'exercice. La condition s'écrit $X > 80 - X$, donc $X \geq 41$. Pour $X \sim \mathcal{B}(80; 0,62)$, la probabilité cumulée vaut environ 0,980927.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité demandée est $P(X \geq 41) \approx 0,981$.

Partie C : Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle est la fréquence observée dans l'échantillon : $f = \frac{54}{90} = 0,6$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2.a. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.**

Avec $f = 0,6$ et $n = 90$, la marge d'erreur vaut $1,96\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{90}} \approx 0,101214$. Ainsi, les bornes sont $0,6 - 0,101214 \approx 0,499$ et $0,6 + 0,101214 \approx 0,701$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\ ;\ 0,701]$.

Question 2.b. **Dire si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.**

Non. Un niveau de confiance de 95 % ne garantit pas que l'intervalle construit à partir de cet échantillon précis contienne la proportion réelle. Il signifie qu'en répétant la procédure, environ 95 % des intervalles obtenus contiendraient cette proportion.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on ne peut pas en être certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux où il est 3. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et fonction exponentielle, puis les probabilités et l'estimation statistique dans un magasin de vélos.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent les exponentielles de la solution générale.
- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(t - a)$.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni pour une proportion est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les données initiales et les unités : distance en centimètres, temps en secondes et vitesse en $cm \cdot s^{-1}$.
- Pour l'algorithme, appliquer chaque mise à jour puis tester la condition avec la valeur courante de t.
- Dans l'arbre pondéré, distinguer les probabilités des branches des probabilités des chemins et utiliser les probabilités totales.
- Respecter les arrondis demandés et rappeler qu'un intervalle de confiance ne garantit pas avec certitude l'appartenance de p.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment construire la solution de l'équation différentielle de la première partie ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines réelles distinctes donnent deux exponentielles dans la solution générale, puis les conditions sur f(0) et f'(0) permettent de déterminer les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité conditionnelle demandée après une vente ?

On utilise $P(E \mid V) = P(E \cap V) / P(V)$. Le numérateur est la probabilité du chemin « vélo électrique puis vente » dans l'arbre, et le dénominateur est la probabilité totale qu'un prêt débouche sur une vente.

Q : Comment traiter les questions de loi binomiale et gérer le temps ?

Identifier n comme le nombre de réparations et p comme la probabilité qu'une réparation dure moins d'une heure. Calculer ensuite la probabilité demandée avec la loi binomiale, puis garder du temps pour les arrondis et les justifications.

Q : L'intervalle de confiance signifie-t-il que la proportion réelle est certainement dedans ?

Non. Le niveau de confiance de 95 % décrit la méthode d'estimation sur des échantillons répétés. Après le prélèvement, l'intervalle calculé ne permet pas d'affirmer avec certitude que la proportion réelle lui appartient.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2023/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Fonderie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.