Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôles qualité et étude de la farine La Romaine (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2023/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Refroidissement de l’eau d’un spa

Après la coupure du chauffage d’un spa, la température de l’eau, initialement à 38 °C, est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L’exercice étudie son évolution, son comportement à long terme, une alarme de température et un algorithme.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

L’équation différentielle homogène est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0{,}05$. Sa solution générale est une fonction exponentielle décroissante : $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Cette expression est définie sur tout l’intervalle demandé, y compris lorsque $C = 0$, ce qui donne la solution nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer, sur [0 ; +∞[, une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Une solution constante s’écrit $y(t) = k$, donc sa dérivée est nulle. En substituant dans l’équation, on obtient $0{,}05k = 1{,}25$, d’où $k = 1{,}25/0{,}05 = 25$. La fonction constante égale à 25 vérifie bien l’équation différentielle sur l’intervalle $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

La solution générale de l’équation avec second membre est la somme d’une solution particulière et de la solution générale de l’équation homogène. On ajoute donc la constante 25 aux fonctions $Ce^{-0{,}05t}$. La constante C peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

1. La forme générale trouvée précédemment est $f(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$.
2. Comme $f(0) = 38$, on a $C + 25 = 38$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 13$.

En remplaçant C par sa valeur, on obtient la formule annoncée pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 dans le modèle : $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 = 13e^{-1{,}2} + 25 \approx 28{,}9$. Comme t est exprimé en heures, le résultat représente la température de l'eau du spa 24 heures après la coupure de l'alimentation électrique. La température est exprimée en degrés Celsius.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 24 h, la température de l'eau est d'environ $28{,}9\ ^\circ\mathrm{C}$.

Question 2.a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de [0 ; +∞[.

> On dérive l'exponentielle composée en multipliant par la dérivée de son exposant. Pour $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, l'exposant $-0{,}05t$ a pour dérivée $-0{,}05$, tandis que la dérivée de la constante 25 est nulle. Ainsi, $f'(t) = 13 \times (-0{,}05)e^{-0{,}05t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2.b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et expliquer si ce résultat est cohérent avec le contexte.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}05t} > 0$. Le signe de la dérivée est donc négatif.

- $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t} < 0$, donc f est strictement décroissante.
- C'est cohérent : après l'arrêt du chauffage, l'eau refroidit et se rapproche de la température ambiante de 25 °C.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement décroissante, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3.a). Déterminer la limite de f en +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0{,}05t$ tend vers $-\infty$. On a donc $e^{-0{,}05t} \to 0$. En utilisant l'expression de f, il vient $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25 \to 13 \times 0 + 25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25$.

Question 3.b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

> La limite de 25 °C représente la température vers laquelle tend l'eau lorsque le temps écoulé devient très grand. Elle correspond à la température ambiante extérieure au spa. Selon le modèle, l'eau se refroidit donc en se rapprochant de la température de son environnement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À long terme, l'eau tend vers la température ambiante, soit 25 °C.

Question 4.a). L'alarme sonore est émise lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le délai avant que l'alarme retentisse, en donnant la valeur exacte puis la valeur arrondie à la minute.

L'alarme retentit lorsque la température devient strictement inférieure à 36 °C. Cherchons d'abord l'instant où elle atteint ce seuil :

1. $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$.
2. En prenant le logarithme, $t = 20\ln(13/11)$ heures, soit environ 200,465 minutes.

L'alarme retentit juste après cet instant de franchissement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20\ln(13/11)$ h, soit 200 min à la minute près.

Question 4.b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui augmente H d'une heure et actualise T selon T = 13e^(-0,05H) + 25 tant que T ≥ 34.

L'algorithme augmente H d'une heure tant que $T \geq 34$. Les valeurs aux deux heures qui encadrent l'arrêt sont :

H (h)	$T = 13e^{-0{,}05H} + 25$ (°C)	Action
7	34,161	Continuer
8	33,714	Arrêter

À 8 heures, la condition $T \geq 34$ n'est plus satisfaite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Valeur affichée : $H = 8$.

Question 4.c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme simule le refroidissement heure par heure. Il augmente H, puis calcule la température correspondante, jusqu'à ce que celle-ci devienne strictement inférieure à 34 °C. La valeur affichée est donc le premier nombre entier d'heures auquel le modèle prévoit que l'eau passe sous ce seuil.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Il détermine qu'après 8 heures, l'eau passe sous 34 °C.

2. Contrôles qualité et étude de la farine La Romaine

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes et l'humidité des blés livrés, puis conditionne sa farine en sacs dont le poids suit une loi normale. L'exercice étudie également l'acceptation d'une nouvelle farine par des catégories de clients et le nombre de clients qui la testent.

Partie A

Question 1.a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, calculer la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est la somme des cinq mesures divisée par 5 : $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. Pour l'écart-type, on calcule la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à cette moyenne : $\sigma = \sqrt{((104-76)^2 + (81-76)^2 + (83-76)^2 + (57-76)^2 + (55-76)^2)/5} = \sqrt{332}$. Arrondi au centième, il vaut 18,22 mm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1.b). En considérant que l'écart-type de la série est de 18 mm, vérifier si le technicien doit effectuer un test sur cinq nouveaux échantillons. Le test est requis si l'une des cinq valeurs précédentes est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ].

La moyenne calculée est $\bar{x} = 76$ mm. Avec l'écart-type imposé $\sigma = 18$ mm, l'intervalle de contrôle est $[\bar{x} - 2\sigma\ ;\ \bar{x} + 2\sigma] = [76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$ mm. Les cinq valeurs, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, sont toutes comprises dans cet intervalle. Aucune ne déclenche donc le contrôle supplémentaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune mesure n'est hors de [40 ; 112] mm : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. Deux camions contiennent respectivement 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et 14 540 kg à 14,1 %. Montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo vide, sachant que le taux d'humidité du mélange doit être inférieur à 13 %.

La masse totale de blé vaut $29\,540 + 14\,540 = 44\,080$ kg. La masse d'eau du mélange est $29\,540 \times 0,124 + 14\,540 \times 0,141 = 5\,713,1$ kg. Le taux d'humidité est donc $\frac{5\,713,1}{44\,080} \times 100 \approx 12,96$ %. Comme ce taux est inférieur à la limite de 13 %, les blés peuvent être mélangés dans le même silo.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Humidité du mélange : environ 12,96 % ; déchargement autorisé.

Partie B

Question 1. Le poids X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'un sac prélevé au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit la variable : $Z = (X - 25,2)/0,1$. Pour la valeur limite de 25 kg, $Z = (25 - 25,2)/0,1 = -2$. La probabilité demandée est donc celle qu'une variable normale centrée réduite soit inférieure à -2. La table de la loi normale donne environ 0,0228, ce qui s'arrondit à 0,023 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2.a). Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^-2 près.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se trouvent dans l'intervalle centré sur la moyenne et de rayon $1,96\sigma$. Ici, $\sigma = 0,1$ kg, donc $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg. Arrondi au centième, le rayon recherché est 0,20 kg.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,20$ kg.

Question 2.b). La représentation graphique d'une fonction de densité est donnée. Expliquer pourquoi elle ne peut pas être celle de la variable aléatoire X.

La variable X a une moyenne de 25,2 kg et un écart-type de 0,1 kg. Environ 95 % des masses devraient donc être comprises entre $25,2 - 1,96 \times 0,1 = 25,004$ kg et $25,2 + 1,96 \times 0,1 = 25,396$ kg. Or, sur le graphique, la courbe est largement étalée autour de 25,2 kg : sa dispersion est incompatible avec l'écart-type annoncé.

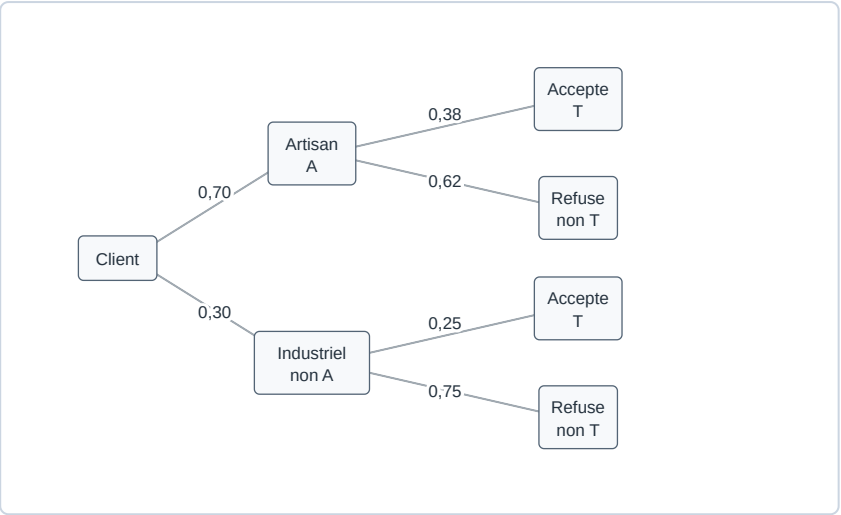
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée pour représenter une loi normale d'écart-type 0,1 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation par un arbre pondéré, à partir de la proportion de clients artisans boulangers et des taux d'acceptation de la farine La Romaine chez les artisans et les boulangers industriels.

Notons A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « il accepte de tester la farine ». Les probabilités des catégories sont $P(A) = 0,70$ et $P(\overline{A}) = 0,30$. Les probabilités conditionnelles d'acceptation sont 0,38 pour les artisans et 0,25 pour les boulangers industriels ; les probabilités de refus sont leurs complémentaires.

Arbre pondéré des clients et de l'acceptation



Les probabilités issues de chaque nœud totalisent 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Branches : 0,70 et 0,30, puis acceptation 0,38 et 0,25, avec leurs probabilités de refus complémentaires.

Question 2.a). Calculer la probabilité qu'un client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

Le chemin demandé correspond à un client artisan qui accepte de tester la farine. La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité d'être artisan et de la probabilité d'accepter sachant que le client est artisan : $P(A \cap T) = P(A)P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2.b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les catégories « artisan » et « boulanger industriel » forment une partition des clients. La probabilité d'accepter est donc la somme des probabilités des deux chemins d'acceptation : $P(T) = P(A)P(T \mid A) + P(\overline{A})P(T \mid \overline{A})$. Ainsi, $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^-3 près, la probabilité que ce soit un artisan boulanger.

La probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a accepté le test est $P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$. D'après les résultats précédents, $P(A \cap T) = 0,266$ et $P(T) = 0,341$. Donc $P(A \mid T) = 0,266 / 0,341 \approx 0,7800587$, soit 0,780 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \mid T) \approx 0,780$.

Question 4.a). La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.

« Au plus 60 » signifie $Y \leq 60$. Pour $Y \sim \mathcal{B}(200 ; 0,341)$, on additionne les probabilités correspondant à 0, 1, jusqu'à 60 clients ayant testé la farine : $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$. Arrondie au millième, cette probabilité vaut 0,125.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4.b). Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(Y) = np$. Ici, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur un grand nombre d'échantillons de 200 clients, le nombre moyen de clients ayant testé la farine La Romaine est donc 68,2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients sur 200 en moyenne.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1; durée et coefficient ne sont pas indiqués sur les pages fournies. Deux exercices portent sur le refroidissement d'un spa et les contrôles et ventes d'une minoterie. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, analyse, algorithmes, statistiques, lois normale et binomiale, et probabilités conditionnelles.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Le modèle du spa est f(t) = 13e^(-0,05t) + 25 et sa température tend vers la température ambiante de 25 °C.
- Le taux d'humidité d'un mélange se calcule par une moyenne pondérée des taux selon les masses des lots.
- Pour Y suivant une loi binomiale de paramètres n et p, son espérance est E(Y) = np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et les arrondis demandés, notamment pour les températures, les durées et les probabilités.
- Pour le contrôle qualité, comparer chacune des cinq mesures à l'intervalle construit autour de la moyenne avec deux écarts-types.
- Pour le mélange des blés, pondérer chaque taux d'humidité par la masse correspondante avant de le comparer au seuil de 13 %.
- Distinguer P(A ∩ T), P(T) et la probabilité conditionnelle P(A | T) dans l'arbre pondéré.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer le délai avant le déclenchement de l'alarme ?

On résout f(t) = 36 avec f(t) = 13e^(-0,05t) + 25. Après avoir isolé l'exponentielle, on applique le logarithme. La durée obtenue est en heures et doit être convertie en minutes pour l'arrondi demandé.

Q : Comment calculer le taux d'humidité des deux lots mélangés ?

On multiplie la masse de chaque lot par son taux d'humidité, puis on additionne les masses d'eau obtenues. On divise cette somme par la masse totale de blé et on compare le taux du mélange au seuil de 13 %.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices indépendants, chacun noté sur 10 points. Répartissez votre temps entre les deux, avancez d'abord sur les questions accessibles et réservez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Que faut-il vérifier dans les probabilités de la partie C ?

L'arbre doit indiquer les proportions des catégories de clients puis les probabilités conditionnelles d'acceptation. Utilisez les probabilités totales pour obtenir P(T), puis P(A | T) = P(A ∩ T) / P(T), en respectant l'arrondi demandé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsfonderie.fr/assets/annales/bts-fonderie/E2 - Mathématiques/2023/BTS Fonderie - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Fonderie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.